

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular

Ensino Artístico Especializado

PROGRAMA

MATEMÁTICA

11º e 12 º ANOS

DIURNO

Disciplina de Opção

Autores

Arsélio Almeida Martins
Cristina Maria Cruchinho da Fonseca
Ilda Maria Couto Lopes
Jaime Carvalho e Silva (coordenador)
Maria Graziela Fonseca

Outubro de 2005

Índice

1 - INTRODUÇÃO	4
2 - FINALIDADES GERAIS.....	5
3 - OBJECTIVOS GERAIS.....	6
4 - COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER	8
5 - ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS	9
5-1- Aplicações e Modelação	9
5-2- Comunicação Matemática	10
5-3- Tecnologia	10
5-4- Articulação com o 3º ciclo	11
6- RECURSOS	11
6-1- Materiais manipuláveis	12
6-2- Uso de calculadoras gráficas.....	12
6-3- Uso de computadores	13
6-4- Laboratórios de Matemática.....	13
6-5- Uso da Internet	13
7- AVALIAÇÃO	13
QUADRO RESUMO	15

MÓDULO INICIAL – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA.....	16
TEMA 1 – GEOMETRIA NO PLANO E NO ESPAÇO	18
TEMA 2 – PADRÕES GEOMÉTRICOS	22
TEMA 3 - ESTATÍSTICA.....	27
TEMA 4 - FUNÇÕES E GRÁFICOS - GENERALIDADES. FUNÇÕES POLINOMIAIS.	31
TEMA 5 – DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS.....	34
TEMA 6 – MATEMÁTICA E ARTE	38
BIBLIOGRAFIA GERAL	41

1 - Introdução

Pelos princípios e métodos de trabalho praticados, a Matemática é uma componente essencial da formação para o exercício da cidadania em sociedades democráticas e tecnologicamente avançadas, tendo por bases a autonomia e a solidariedade. O conhecimento científico em geral, e matemático em particular, é uma ferramenta essencial da independência empreendedora de cada cidadão que tem de ser responsável e consciente pelo ambiente em que vive e das relações em que está envolvido.

Genericamente, a Matemática é parte imprescindível da cultura humanística e científica que permite ao cidadão ganhar flexibilidade para se adaptar a mudanças tecnológicas ou outras e para sentir-se motivado a continuar a sua formação ao longo da vida. A Matemática contribui para a construção da língua com a qual se relaciona, facilitando a selecção, avaliação e integração das mensagens necessárias e úteis, ao mesmo tempo que fornece acesso a fontes de conhecimento científico a ser mobilizado sempre que necessário. A Matemática contribui para uma melhor compreensão do espaço envolvente, ajudando a perceber as relações geométricas entre os diversos elementos naturais.

A Geometria está de tal modo presente na Natureza, que a Arte frequentemente se socorre da Geometria para a descrever, exagerando muitas vezes até essa Geometrização da Natureza, sendo exemplo disso escolas como a do Cubismo. Pareceria assim estranho que um artista não tivesse uma forte formação em Geometria, razoavelmente para além dos rudimentos estudados no Ensino Básico.

Finalmente, a Matemática é uma das bases teóricas essenciais e necessárias de todos os grandes sistemas de interpretação da realidade que garantem a intervenção social com responsabilidade e dão sentido à condição humana.

A Matemática aparece, para os Cursos do Ensino Artístico Especializado, como uma disciplina bienal, de opção, na componente de formação científica, a que é atribuída a carga horária de duas unidades lectivas semanais de 90 minutos ao longo de 33 semanas lectivas.

Embora o programa de Matemática esteja organizado por grandes temas matemáticos, estes têm de ser escolhidos de tal modo que competências fundamentais sejam contempladas e têm de estar ligados a necessidades reais e fornecer instrumentos de compreensão do real com utilidade compreensível imediata. Devem ainda poder ser motor de compreensão da Matemática como um todo em que cada tema se relaciona com outros e em que a aprendizagem de cada assunto beneficia a aprendizagem de

outros. Cada assunto, embora desenvolvido mais detalhadamente dentro da leccionação de um tema, deve ser assunto interessante e útil na abordagem dos diversos temas.

Para estes estudantes não é fundamental o desenvolvimento de competências ao nível do domínio das regras lógicas e dos símbolos. O essencial da aprendizagem da Matemática deve ser procurado ao nível das ideias para a resolução de problemas e para as aplicações da Matemática. O uso das ferramentas deve ser ensinado e aprendido no contexto das ideias e da resolução de problemas interessantes, enfim em situações que exijam o seu manejo e em que seja vantajoso o seu conhecimento, privilegiando mesmo características típicas do ensino experimental. A Matemática, nas suas conexões com todos os ramos de saber, é uma contribuição decisiva para a consciência da necessidade da educação e da formação ao longo da vida, com vista a enfrentar mudanças profissionais e as incontornáveis adaptações às inovações científicas, tecnológicas e artísticas.

Os temas a abordar incluem sobretudo Geometria devido às suas relações mais estreitas com a Arte, mas não esquecem que um artista é também um cidadão e por isso necessita de entender minimamente outro tipo de linguagem, nomeadamente a das funções e a da estatística.

A abordagem da Geometria inclui assuntos elementares de geometria sintética e métrica, geometria analítica, trigonometria e padrões, com algumas competências de cálculo numérico a elas associadas, com permanentes preocupações de contextualização.

A abordagem das Funções Reais incidirá nas funções polinomiais pela ponte que estabelecem entre a geometria da recta e a regressão estatística. O trabalho será essencialmente feito tendo por base a calculadora gráfica ou o computador, com uma ênfase natural nas aplicações.

A abordagem da Estatística elementar completará as aprendizagens básicas, com algumas noções novas e ferramentas que não podem ser compreendidas no ensino básico, mas que são fundamentais para a vivência de um cidadão empenhado do século XXI.

2 - Finalidades gerais

São finalidades desta disciplina:

- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real;
- Desenvolver a capacidade de reconhecer regularidades e modelos matemáticos relevantes em cada problema da realidade, e de os utilizar para ajudar a resolver esse problema, eventualmente em diálogo com especialistas;

- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade;
- Desenvolver a percepção espacial e geométrica e o sentido da harmonia e valorizar o contributo e a presença da matemática em diferentes formas e representações artísticas ao longo dos tempos;
- Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para a inserção plena na vida profissional como para o prosseguimento de estudos;
- Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência;
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade;
- Criar capacidades de intervenção social pelo estudo e compreensão de problemas e situações da sociedade actual e bem assim pela discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania activa e participativa.

3 - Objectivos Gerais

São objectivos gerais da disciplina no ensino secundário:

VALORES/ATITUDES	CAPACIDADES/APTIDÕES	CONHECIMENTOS
Desenvolver a confiança em si próprio: <ul style="list-style-type: none"> • Expressar e fundamentar as suas opiniões. • Revelar espírito crítico, de rigor e de confiança nos seus raciocínios. • Abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade. • Procurar a informação de que necessita. 	Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real: <ul style="list-style-type: none"> • Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução. • Seleccionar estratégias de resolução de problemas. • Formular hipóteses e prever resultados. • Interpretar e criticar resultados no contexto do problema. • Resolver problemas nos domínios da Matemática, da Arte, da Arquitectura, 	Ampliar os conhecimentos de Geometria no Plano e no Espaço: <ul style="list-style-type: none"> • Resolver problemas de incidência, paralelismo e perpendicularidade no plano e no espaço, por via intuitiva. • Resolver problemas elementares no plano e no espaço usando coordenadas. • Identificar e construir padrões geométricos.

Cursos Artísticos Especializados
Matemática

VALORES/ATITUDES	CAPACIDADES/APTIDÕES	CONHECIMENTOS
<p>Desenvolver interesses culturais:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Manifestar vontade de aprender e gosto pela pesquisa. • Interessar-se por notícias e publicações relativas à Matemática e a descobertas científicas e tecnológicas. • Apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo. • Apreciar o contributo da matemática para as representações artísticas ao longo dos tempos. <p>Desenvolver hábitos de trabalho e persistência:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Elaborar e apresentar os trabalhos de forma organizada e cuidada. • Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova. <p>Desenvolver o sentido da responsabilidade:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Responsabilizar-se pelas suas iniciativas e tarefas. • Avaliar situações e tomar decisões. <p>Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Colaborar em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades. • Respeitar a opinião dos outros e aceitar as diferenças. • Intervir na dinamização de actividades e na resolução de problemas da comunidade em que se insere. 	<p>Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Descobrir relações entre conceitos de Matemática. • Formular generalizações a partir de experiências. • Validar conjecturas. • Fazer raciocínios válidos usando métodos adequados. • Compreender a relação entre o avanço científico e o progresso da humanidade. <p>Desenvolver a capacidade de comunicar:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e rigor. • Interpretar textos de Matemática. • Expressar o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens. • Usar correctamente o vocabulário específico da Matemática. • Usar a simbologia da Matemática. • Apresentar os textos de forma clara e organizada. 	<p>Estudar modelos elementares de funções:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos. • Resolver problemas com funções quadráticas e cúbicas. <p>Determinar distâncias inacessíveis:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolver triângulos rectângulos e oblíquângulos. • Resolver problemas de distâncias inacessíveis. <p>Ampliar os conhecimentos de Estatística:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Organizar e interpretar caracteres estatísticos. • Resolver problemas com distribuições bidimensionais. <p>Conhecer aspectos da História da Matemática:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Conhecer personalidades e factos marcantes da História da Matemática e relacioná-los com momentos históricos de relevância cultural ou social. • Conhecer artistas que usaram a Matemática nas suas obras, desde a perspectiva aos fractais.

4 - Competências a Desenvolver

Espera-se que os estudantes se apropriem de conceitos e de técnicas matemáticas enquanto enfrentam situações, de tal modo que, face a problemas realistas, possam mobilizar os conhecimentos científicos adequados para dar respostas próprias. Pretende-se que o estudante seja capaz de formar uma opinião própria, participando nas decisões ou que consiga ele próprio tomá-las.

Entende-se aqui que cada competência implica um corpo coerente de conhecimentos, atitudes ou capacidades (e habilidades na escolha e depois no manejo das ferramentas, quaisquer que elas sejam), que só os resultados operados na acção autónoma dos estudantes garantem que tenham sido desenvolvidas para serem úteis na vida.

Para desenvolver a competência matemática consideram-se os seguintes princípios fundamentais.

1. Num ensino que parte de propostas de trabalho relevantes e com significado para os estudantes, a mediação do professor é um dos processos essenciais na estruturação das aprendizagens significativas e no desenvolvimento da competência matemática dos estudantes. Disponibilizando as ferramentas matemáticas necessárias e participando na organização das ideias, com este tipo de ensino desenvolve-se a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção na realidade. A análise de situações da vida real, a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, a selecção de estratégias para resolver problemas, a formulação de hipóteses e previsão de resultados são orientações que contribuem para a formação de estudantes que manifestem vontade de aprender e gosto pela pesquisa. Neste âmbito há oportunidade para apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.
2. A aprendizagem baseada no trabalho autónomo sobre as situações apresentadas (que podem apresentar vários níveis de resolução) e em tarefas que aprofundem os conceitos introduzidos no decurso dos trabalhos, contribui para o desenvolvimento da auto-confiança dos estudantes criando-lhes oportunidades para se exprimirem, fundamentarem as suas opiniões e revelarem espírito crítico, de rigor e confiança nos seus raciocínios.
3. A participação da Matemática no desenvolvimento das competências profissionais contribui para o desenvolvimento da comunicação (dos conceitos, dos raciocínios ou das ideias) com clareza e progressivo rigor lógico. A definição de trabalhos de grupo, de acordo com as motivações dos estudantes, propicia o desenvolvimento do espírito de tolerância, de cooperação, do respeito pela

opinião dos outros e a aceitação das diferenças, e pode contribuir para o desenvolvimento de interesses culturais e do gosto pela pesquisa.

5 - Orientações Metodológicas

A Matemática constitui um património cultural da humanidade e um modo de pensar que é distinto de outros ligados a diferentes áreas do conhecimento e da actividade humana. O professor proporá situações que levem os estudantes a realizar actividades matemáticas: explorar, procurar generalizações, fazer conjecturas e raciocinar logicamente. Ao realizar este tipo de actividades, cria-se o hábito de experimentar, tentar encontrar generalizações e procurar o que há de invariante numa situação. Se o estudante compreender que não basta que uma hipótese formulada se verifique em alguns casos para poder tomar essa hipótese como uma afirmação verdadeira, sendo necessário encontrar uma argumentação lógica para a validar ou um contra-exemplo para a rejeitar, então o estudante está a desenvolver aspectos essenciais da sua competência matemática.

5-1- Aplicações e Modelação

As aplicações e os problemas extraídos do mundo real e das profissões estão no centro deste programa. As aplicações integradas num contexto significativo para os estudantes, são usadas como ponto de partida para cada novo assunto, sendo parte do processo de construção de conceitos matemáticos dos estudantes e usadas como fonte de exercícios. Sendo as tarefas de modelação e resolução de problemas centrais neste programa, recomenda-se fortemente que se cumpram os seguintes critérios:

- a teoria e as aplicações devem estar interligadas;
- os problemas apresentados devem estimular os processos de pensamento em vez da aplicação de algoritmos;
- os contextos das situações problemáticas apresentadas devem integrar diferentes ideias matemáticas;
- alguns dos problemas a seleccionar devem ser abertos, obrigando os estudantes a escolher as ferramentas matemáticas mais adequadas.

A escolha de situações ricas e variadas é essencial para o cumprimento destes critérios; recomenda-se a colaboração activa dos professores de Matemática e de outras disciplinas.

Os estudantes (individualmente ou em grupo) devem ter a possibilidade de escolher as suas próprias estratégias de resolução de problemas; o facto de se poder confrontar diferentes processos de resolução de problemas permite fomentar a aprendizagem de uma forma crítica, valorizando o trabalho efectuado.

5-2- Comunicação Matemática

Tendo em conta a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem, é absolutamente necessário que as tarefas tenham em conta a correcção da comunicação oral e escrita. O estudante deve verbalizar os raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros. Deve ser capaz de argumentar com lógica. É necessário proporcionar ao estudante oportunidade para expor um tema preparado, a resolução de um problema ou a parte que lhe cabe num trabalho de grupo.

Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias ou outros, devem ser apresentados de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado.

5-3- Tecnologia

O uso de tecnologias de cálculo, com capacidades gráficas e de comunicação, é fundamental para a criação e o desenvolvimento de competências úteis a todos os desempenhos profissionais. Pelas suas especificidades, a calculadora gráfica e o computador completarão os meios à disposição dos professores e estudantes para executar os diferentes aspectos de uma verdadeira actividade matemática. Com efeito permitem:

- obter rapidamente uma representação do problema, de um conceito, a fim de lhe dar sentido e favorecer a sua apropriação pelo estudante;
- ligar aspectos diferentes (gráfico, numérico e algébrico) de um mesmo conceito ou de uma mesma situação;
- explorar situações fazendo aparecer de forma dinâmica diferentes configurações;
- proceder de forma rápida à verificação de certos resultados.

Não é possível atingir os objectivos deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes traçam uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores). O trabalho de modelação matemática só será plenamente atingido se for possível trabalhar na sala de aula as diversas fases do processo, embora não seja exigível que se tratem todas simultaneamente e em todas as ocasiões; em particular, é fundamental a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores para, em algumas situações, os estudantes tentarem identificar modelos matemáticos que permitam a sua interpretação.

Ao usar a calculadora gráfica ou o computador, os estudantes devem aprender a elaborar conjecturas em função do que se lhes apresenta, sendo incentivados a analisar criticamente tudo o que observam, sendo capazes nomeadamente de não se

deixar confundir com as escalas e sabendo escolher com cuidado o rectângulo de visualização.

Um estudante pode ser confrontado com situações em que erros de aproximação conduzam a resultados absurdos; quando isso acontecer deve saber analisar criticamente a situação, usando dados do problema em causa. Como forma de diminuir a possibilidade de ocorrência de situações dessas, deve ser feita a recomendação genérica de, nos cálculos intermédios, se tomar um grau de aproximação substancialmente superior ao grau de aproximação que se pretende para o resultado.

5-4- Articulação com o 3º ciclo

Como existe um hiato de um ano entre o final do 3º ciclo e o início desta disciplina, há que ter especiais cuidados para garantir que os estudantes possuam os conhecimentos matemáticos necessários no início do 11º ano. Como além disso, a Matemática é uma disciplina de grande insucesso, os estudantes podem não trazer do 3º ciclo os conhecimentos mínimos necessários. Em função disso, o programa prevê um **Módulo Inicial** cujo objectivo é ambientar os estudantes ao tipo de trabalho que se pretende no ensino secundário, muito virado para a resolução de problemas concretos. Esse Módulo Inicial pretende também ajudar o professor a despistar eventuais lacunas dos estudantes; no caso de serem detectadas lacunas consideráveis os órgãos próprios da escola devem actuar em consequência.

Como muitas vezes as dificuldades dos estudantes radicam num ensino deficiente de Geometria no Ensino Básico sugere-se, se tal for o caso, que seja criado um tempo lectivo suplementar por semana desde o fim do Módulo Inicial até ao fim do 1º período, destinado aos estudantes a quem foram detectadas dificuldades, de modo a retomar de forma integrada a Geometria do Ensino Básico.

Sugere-se ainda que, caso a escola tenha condições para isso, seja oferecido no 10º ano um **Curso Livre de Matemática** aos estudantes que queiram aproveitar para colmatar as suas lacunas, nomeadamente, em Geometria, em Funções e em Estatística.

6 - Recursos

Para a maioria dos estudantes, a ligação da Matemática com a realidade tem de ser feita com a ajuda de objectos concretos, tanto na tentativa de abstracção a partir da realidade como na tentativa de aplicação de uma estrutura abstracta a uma situação concreta. Os estudantes devem utilizar materiais manipuláveis diversos (nomeadamente de natureza computacional) para “dar vida” aos modelos físicos que aumentem a compreensão das situações em estudo. Na maior parte das vezes os materiais necessários podem ser obtidos a partir de elementos baratos ou recuperados

de outras actividades, não devendo a falta de recursos mais sofisticados impedir uma concretização e manipulação considerada fundamental para o trabalho dos estudantes.

6-1- Materiais manipuláveis

Tanto em geometria plana como em geometria do espaço a prática de manipulação e observação de figuras e modelos tem um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo, pelo que todas as tarefas devem poder tirar partido da manipulação de modelos geométricos concretos; devem usar-se materiais adequados como sólidos geométricos (construídos em diversos materiais como placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, plástico ou “polydron”), sólidos de enchimento, planificações e outros materiais manipuláveis.

6-2- Uso de calculadoras gráficas

As calculadoras gráficas (que são também calculadoras científicas completíssimas), ferramentas que cada vez mais se utilizarão correntemente, devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas essencialmente como meios incentivadores do espírito de pesquisa. O uso de calculadoras gráficas é obrigatório. Tendo em conta os temas presentes no programa, a calculadora é especialmente importante no estudo das funções, da estatística e das distâncias inacessíveis, podendo ainda ser úteis noutros temas, nomeadamente no tema “Matemática e Arte”. Torna-se assim muito recomendável o uso da calculadora gráfica nos seguintes tipos de actividade matemática:

- abordagem numérica de problemas;
- uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações;
- modelação, simulação e resolução de situações problemáticas;
- uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável, com métodos algébricos;
- condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjecturas;
- estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções;
- investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática.

Os estudantes devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu ecrã pode ser uma visão distorcida da realidade; é importante que os estudantes descrevam os raciocínios utilizados e interpretem aquilo que se lhes apresenta de modo que não se limitem a “copiar” o que vêem.

6-3- Uso de computadores

O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da geometria dinâmica e da representação gráfica de funções e da simulação, permite tarefas não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores, sendo por isso obrigatória a sua utilização neste programa.

Vários tipos de programas de computador são muito úteis e enquadram-se no espírito do programa. O número de programas disponíveis no mercado português aumenta constantemente, havendo muito software de distribuição livre, como o editado pelo Ministério da Educação no âmbito dos projectos Minerva e Nónio Século XXI.

6-4- Laboratórios de Matemática

Em face do trabalho prático preconizado por este programa, em estreita ligação com exemplos concretos recolhidos em diversas manifestações da vida real, os estudantes devem trabalhar frequentemente com um computador, seja para visualização de fotografias e outros exemplos, seja para simulações, seja para elaboração de projectos. Nesse sentido as escolas devem disponibilizar o material necessário para que tal tipo de trabalhos se possa realizar em boas condições, recomendando-se que se constituam **Laboratórios de Matemática**.

6-5- Uso da Internet

Sendo hoje acessível a todas as escolas portuguesas a ligação à Internet o professor não deve deixar de tirar todo o partido deste novo meio de comunicação, seja como fonte de informação, seja como fonte de recolha de dados realistas. A participação em actividades envolvendo estudantes de escolas diferentes é um bom meio de estimular a realização de actividades ligadas a situações reais e concretas.

7 - Avaliação

Pretende-se que as situações de avaliação não se restrinjam ao produto final mas atendam também ao processo de aprendizagem e permitam que o estudante seja um elemento activo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem. As tarefas de aprendizagem deverão ser encaradas também como tarefas de avaliação. O professor pode ficar a conhecer o que os estudantes são capazes de fazer perante um problema concreto ou mediante uma proposta de investigação; esses dados podem ser utilizados

para orientar aprendizagens posteriores que ofereçam aos estudantes oportunidade de ir integrando as novas aprendizagens de forma positiva e consciente.

Assim, recomenda-se que a avaliação se organize através do uso de um portefólio¹. Mais do que um produto final, os portefólios são vistos e utilizados “como instrumentos de estimulação e como factores de activação do pensamento reflexivo, providenciando oportunidades para documentar, registar e estruturar os procedimentos e a própria aprendizagem”².

Assim a tónica fundamental da metodologia do portefólio é a de permitir a possibilidade de sucesso do estudante que atempadamente pode transformar, mudar, (re)equacionar em tempo útil a sua aprendizagem. O portefólio permite uma lógica formativa e compreensiva que dá sentido à avaliação sumativa mesmo que através da classificação final.

O portefólio pode assumir, assim, uma função estruturante, organizadora da coerência que é continuamente (re)elaborada na acção, em tempo útil e no decurso do trabalho matemático proposto. A elaboração do portefólio promove a tomada de decisões, a necessidade de agir, de julgar, de definir e obedecer a critérios contribuindo para o conhecimento aprofundado da matemática enquanto ciência e ferramenta estruturante para as Artes.

Os trabalhos constantes do portefólio não se podem obviamente reduzir aos testes escritos devendo ser tão diversificados quanto possível. Sugere-se o uso de redacções matemáticas (sob a forma de resolução de problemas, composições/reflexões, projectos, relatórios ou outras) que reforcem a importante componente da comunicação matemática (o trabalho pode ser proveniente de um trabalho individual, de grupo, de um trabalho de projecto ou outro julgado adequado) e a utilização de “testes em duas fases”³ que permitem o desenvolvimento da persistência na procura de soluções para situações novas, para além de contribuírem para uma atitude de reflexão sobre a aprendizagem.

Em cada tema são indicadas actividades importantes a realizar, pelo que a avaliação de cada módulo deve valorizar adequadamente a actividade desenvolvida pelo estudante.

¹ PONTE, J. P. (coord.), BOAVIDA, A. M., GRAÇA, M., ABRANTES, P. E BASTOS, R. (1997). *Didáctica: Ensino Secundário*. Lisboa: ME-DES. pp. 114-116. Disponível em — <http://www.dgidec.min-edu.pt/mat-no-sec/> —

² Sá-Chaves, I. (2000) *Formação de Professores – portfolios reflexivos*. (pp,15) Aveiro; Universidade de Aveiro

³ PONTE, J. P. (coord.), BOAVIDA, A. M., GRAÇA, M. E ABRANTES, P. (1997). *Didáctica: Ensino Secundário*. Lisboa: ME-DES. pp. 108-112. Disponível em — <http://www.dgidec.min-edu.pt/mat-no-sec/> —

Quadro Resumo

Distribuição dos temas em cada ano

11º ano	12º ano
Tema Central Aplicações e Modelação Matemática	
<p>Módulo Inicial – Resolução de problemas de Geometria</p> <p>Tema 1 — Geometria no Plano e no Espaço. Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço. O método das coordenadas para estudar Geometria no plano e no espaço. Equação da recta.</p> <p>Tema 2 — Padrões Geométricos. Identificação de simetrias. Estudo e reconstrução de aspectos geométricos de exemplares do património artístico e histórico.</p> <p>Tema 3 — Estatística. Estatística – Generalidades. Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos). Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva).</p>	<p>Tema 4 — Funções e Gráficos - Generalidades. Funções Polinomiais. Função, gráfico e representação gráfica. Estudo intuitivo de propriedades das funções quadráticas e cúbicas e dos seus gráficos.</p> <p>Tema 5 — Distâncias inacessíveis Resolução de triângulos rectângulos. Resolução de triângulos obliquângulos. Determinação de distâncias inacessíveis.</p> <p>Tema 6 — Matemática e Arte Estudo de um autor, escola ou período.</p>
Temas transversais Resolução de problemas e actividades investigativas Comunicação matemática História da matemática Tecnologia e Matemática	

Módulo inicial – Resolução de problemas de geometria

9 aulas de 90 minutos

O professor deverá propor neste módulo problemas ou tarefas aos estudantes que permitam consolidar e fazer uso de conhecimentos essenciais adquiridos no 3º ciclo de modo tanto a detectar dificuldades em questões básicas como a estabelecer uma boa articulação entre este ciclo e o ensino Secundário. Poderá partir de uma determinada situação, de um determinado tema, procurando evidenciar conexões com outros temas, tomando como meta o desenvolvimento das competências matemáticas transversais, isto é, daquelas que atravessam todos os temas e devem constituir os grandes objectivos de um currículo de Matemática. Uma compreensão mais profunda da Matemática só se verifica quando o estudante vê as conexões, quando se apercebe que se está a falar da mesma coisa encarando-a de diferentes pontos de vista. Se os estudantes estão a explorar, por exemplo, um problema de geometria poderão estar a desenvolver a sua capacidade de visualizar, de fazer conjecturas e de as justificar, mas também poderão estar a trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, a trabalhar com proporções na semelhança de figuras ou a trabalhar com expressões algébricas.

Os problemas a tratar neste módulo devem integrar-se essencialmente nos temas Números, Geometria e Álgebra deixando para outra altura os problemas que se integrem no tema Funções ou Probabilidades e Estatística. Pretende-se que os problemas a propor ponham em evidência o desenvolvimento de capacidades de experimentação, o raciocínio matemático (com destaque para o raciocínio geométrico) e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas e à sua verificação.

Todas as tarefas devem estar ligadas à manipulação de modelos geométricos concretos.

A seguir são apresentados enunciados dos problemas que deverão ser propostos aos estudantes. Esta lista pode ser parcial ou totalmente substituída por outra que, em termos gerais, contemple os mesmos conhecimentos e capacidades; esses outros problemas deverão, de preferência, ser retirados de documentos oficiais relativos ao Ensino Básico.

a) Construção de caixas sem tampa, a partir de uma folha rectangular. Medidas de grandezas associadas a essas caixas.

b) Porque é que há só 5 sólidos platónicos?

c) Que relação existe entre o volume de um cubo e o do tetraedro cujas arestas são as diagonais faciais do cubo? Que polígonos é possível obter cortando um tetraedro por um plano paralelo a duas arestas? Qual o perímetro e a área dos polígonos que constituem as secções?

d) Estudo da possível "semelhança" entre garrafas de água de uma dada marca de 33cl, 50cl, 75cl e 1,5l.

e) Que efeito tem uma redução de 50% numa fotocopiadora?

Alguns destes problemas poderão ser substituídos, com vantagem, por tarefas ou problemas ligados ao mundo real, propostos e planificados por um grupo de professores do conselho de turma de modo a integrar na sua resolução conhecimentos de várias disciplinas.

Bibliografia

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1997). *Geometria: Matemática — 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

VELOSO, EDUARDO (1998). *Geometria - Temas actuais — Materiais para professores*. (Desenvolvimento curricular no Ensino Secundário;11). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Este texto é uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que queira ensinar seriamente Geometria em Portugal. É uma obra que cobre inúmeros temas de Geometria elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos de História da Matemática que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho para clubes de matemática ou ainda para estudantes mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. A tecnologia é usada de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc."

Tema 1 – Geometria no Plano e no Espaço

14 aulas de 90 minutos

O ensino da Geometria reveste-se da maior importância devendo desenvolver uma intuição geométrica e um raciocínio espacial assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a Matemática, formular e resolver problemas abstractos ou numa perspectiva de modelação matemática. Deve ainda desenvolver capacidades de organização e de comunicação quer oral quer escrita. É aconselhável que os estudantes realizem pequenas investigações e façam depois relatórios utilizando linguagem matemática rigorosa (o que não significa que se deva recorrer à linguagem simbólica).

Tanto em geometria plana como em geometria do espaço a prática de manipulação e observação de figuras e modelos tem um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo, com prejuízo absoluto do ponto de vista axiomático. O professor deve propor tarefas de construção, de manipulação de modelos e ligadas a problemas históricos fazendo surgir a partir do problema e do caminho que se faz para a sua resolução uma grande parte dos resultados teóricos que pretende ensinar ou recordar.

A exploração de software de Geometria Dinâmica pode ajudar eficazmente o estudante a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço e a fazer conjecturas acerca de relações ou acerca de propriedades de objectos geométricos, pelo que a sua utilização é obrigatória neste tema.

Devem dar-se a conhecer problemas históricos e propor ao estudante a resolução de pelo menos um. Será também conveniente dar a conhecer um pouco da História da Geometria à qual estão ligados os nomes dos maiores matemáticos de todos os tempos (Euclides, Arquimedes, Newton, Descartes, Euler, Hilbert, entre muitos outros).

Os conhecimentos dos estudantes sobre transformações geométricas devem ser tidos em consideração para serem utilizados e ampliados na resolução de problemas concretos.

Mesmo quando há lugar a resolver um problema por via analítica o professor deve incentivar o esboço de figuras geométricas de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver capacidades de representação, ou seja, não se deve deixar que o estudante se limite à resolução exclusiva de equações e à utilização de fórmulas. Para além disso, deve apelar-se sempre à descrição, com algum detalhe, do processo utilizado, justificando-o adequadamente. Devem apresentar-se aos estudantes problemas que possam ser resolvidos por vários processos (perspectiva sintética, geometria analítica, transformações geométricas, utilização de programas de geometria dinâmica). Devem explorar-se sempre que possível as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento deve prolongar-se noutros temas. Todas as tarefas devem estar ligadas à manipulação de modelos geométricos

concretos, devendo tirar-se partido de materiais adequados como sólidos geométricos, construídos em diversos materiais como placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, plástico, “polydron”, sólidos de enchimento e outros materiais manipuláveis.

Desenvolvimento do tema e indicações metodológicas

Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço

(esta resolução de problemas serve para fornecer ao estudante o alargamento de experiências de índole geométrica mostrando-lhe a importância e o papel da matemática como criadora de modelos que permitem interpretar e compreender a realidade)

Eis alguns dos tópicos que poderão ser estudados na resolução de problemas ou em investigações:

- estudo de algumas transformações geométricas em decorações;
- estudo de manifestações concretas dos Teoremas de Pitágoras e de Tales;
- presença da Geometria nalguns monumentos;
- estudo de esculturas geométricas;
- um problema histórico e sua ligação com a História da Geometria.

Nenhum destes tópicos é obrigatório, podendo ser usados outros que permitam atingir os mesmos objectivos. Devem ser utilizados exemplos concretos como, por exemplo, barras de tapetes de Arraiolos, azulejos, mosaicos (como os de Conímbriga), padrões geométricos africanos (*sipatsi, lusona*, etc.), geometria de igrejas, monumentos conhecidos (Cubo da Ribeira, Monumento ao empresário, monumento de Condeixa à auto-estrada, esculturas das áreas de serviço das auto-estradas, etc.) directamente ou através de fotografias. Estes tópicos devem ser trabalhados recorrendo à manipulação de figuras geométricas. O aparecimento de cálculos de áreas e volumes e a necessidade de efectuar estimativas deve aparecer de forma natural.

O método das coordenadas para estudar Geometria no plano e no espaço

- Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano e no espaço. Correspondência entre o plano e \mathbb{R}^2 , entre o espaço e \mathbb{R}^3 . Cálculo da distância entre dois pontos no plano e no espaço.

O professor deve propor ao estudante tarefas que o levem a sentir a necessidade e vantagem do uso de um referencial, quer no plano quer no espaço. O professor pode fornecer figuras e/ou um referencial numa grelha e pedir a colocação da figura ou do referencial para obter “as melhores coordenadas” experimentando com várias figuras no plano e no espaço. Será vantajoso que o professor aproveite os problemas com que iniciou a unidade, recorrendo aos modelos já utilizados para fazer aparecer as novas noções levando o estudante a justificar determinadas proposições por mais de um processo. No plano, o estudante deve descobrir as relações entre as coordenadas de pontos simétricos relativamente ao eixo das abcissas, ao eixo das ordenadas e à bissectriz dos quadrantes ímpares. No espaço, o estudante deve descobrir as relações entre pontos simétricos relativamente aos planos coordenados e aos eixos coordenados.

- Equação reduzida da recta no plano e equação $x = x_0$.

O conhecimento da equação reduzida da recta deverá permitir que o estudante saiba obter a equação de qualquer recta cujo gráfico lhe seja apresentado, sem para isso ser necessário fazer exercícios repetitivos.

- Equações dos planos paralelos aos eixos coordenados num referencial espacial e equações das rectas de intersecção desses planos.

É vantajoso relacionar, por exemplo, o plano de equação $x=a$ (no espaço) e a recta de equação $x=a$ num plano, como “ projecção ” daquele (como a planta de uma casa, em que as paredes se convertem em linhas...); os estudantes devem ainda, a partir das equações de uma recta no espaço, entender esta como intersecção de planos em casos triviais.

Bibliografia

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1997). *Geometria: Matemática — 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

VELOSO, EDUARDO (1998). *Geometria - Temas actuais — Materiais para professores*. (Desenvolvimento curricular no Ensino Secundário;11). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Este texto é uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que queira ensinar seriamente Geometria em Portugal. É uma obra que cobre inúmeros temas de Geometria elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos de História da Matemática que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho para clubes de matemática ou ainda para estudantes mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. A tecnologia é usada de forma “natural” para “resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc.”.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (1999). *Geometria com o Cabri-Géomètre*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de tarefas para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

JUNQUEIRA, M.; VALENTE, S.. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de tarefas para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

APM. (2000). *Pasta de actividades - Pavimentações*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de tarefas experimentadas num Círculo de Estudos, desenvolvendo conexões da geometria com outras áreas.

GERDES, P. (2003). *Sipatsi - Cestaria e Geometria na Cultura Tonga de Inhambane*. Maputo: Moçambique Editora.

Cursos Artísticos Especializados
Matemática

Esta publicação contém numerosos exemplos dos padrões dos sipatsi e exemplos de exploração educacional e matemática desses padrões.

GERDES, P. (2000). *Lusona - Recreações Geométricas de África*. Lisboa: Texto Editora.

Este livro contém problemas geométricos baseados em desenhos tradicionais dos Tchoukwe de Angola - os (lu)sona.

DEVLIN, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Esta é uma obra interessante que apresenta a matemática como sendo a ciência dos padrões através de diversos temas matemáticos.

RAWSON, W.; CHAMOSO, J. (2004). *Contando la geometria – diálogos de matemáticos*. Espanha: NIVOLA libros y ediciones, S.L.

Este livro apresenta um diálogo de dois cidadãos que partiram pelas ruas da cidade à procura de aspectos geométricos com o objectivo de observar o contexto envolvente como se fosse um laboratório matemático.

Tema 2 – Padrões Geométricos

16 aulas de 90 minutos

A observação de representações no património construído, na decoração e nos artefactos do quotidiano é fundamental para a atribuição de valor de gosto e para a compreensão da geometria como ciência estruturante do gosto. A descoberta de regularidades e padrões nas observações e a capacidade de os reconstruir a partir de elementos fundamentais são competências muito importantes.

Os estudantes já tiveram anteriormente contacto com um ensino da Geometria que lhes desenvolveu a intuição geométrica e o raciocínio espacial, para além de os ter ajudado a explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usando e aplicando a Matemática.

É preciso agora que desenvolvam competências geométricas de visualização e classificação das regularidades e padrões e das transformações geométricas, ao mesmo tempo que vão realizando tarefas, com papel e instrumentos de desenho e corte e recorrendo a programas de geometria dinâmica e computadores, cujo resultado deve consistir em materiais físicos palpáveis, úteis para outras disciplinas e para um portefólio pessoal com vista a afirmação na vida profissional.

A leccionação deste tema deve levar em conta as aprendizagens realizadas noutras disciplinas, particularmente naquelas onde há trabalho de desenho técnico ou de qualquer tipo de representações geométricas.

Desenvolvimento do tema e indicações metodológicas

Identificação de simetrias

- Estudo de padrões geométricos planos (frisos e papeis de parede) e das pavimentações regulares com identificação das transformações neles envolvidas

Deve ser referido aos estudantes que existem apenas 7 tipos de padrões de frisos e 17 tipos de padrões de papeis de parede. Os estudantes devem contactar com as listas de todos esses padrões, investigar se conseguem obter outros tipos de padrões e constatar que se obtém sempre um dessas listas.

- Estudo de problemas de empacotamento e composição e decomposição de figuras tridimensionais, com identificação das transformações geométricas neles envolvidos, com particular incidência nas simetrias do cubo.

Os estudantes poderão reconstruir em modelos (maquetas ou desenhos), com recurso a medições e escalas, padrões como elementos decorativos; deverão comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados, como prática para apresentação de artes finais; se os estudantes tiverem dificuldades em identificar as vantagens do uso de transformações

geométricas, o professor deve chamar-lhes a atenção; os estudantes poderão identificar algumas transformações geométricas em elementos decorativos de artesanato ou de produtos industriais.

Estudo e reconstrução de aspectos geométricos de exemplares do património artístico e histórico

- Abordagem de um problema histórico, ou de um estilo de elementos decorativos e sua ligação com a História da Geometria.

Este estudo deve ser feito com a ajuda de um software de Geometria Dinâmica a partir de um elemento base mínimo. Os estudantes poderão assim reconhecer a importância das transformações geométricas na actualidade da produção de arte decorativa e na história do património artístico da sua região.

O professor deve propor tarefas de observação de exemplares de arte decorativa e de reconstrução e manipulação de modelos ligados a exemplares históricos. A exploração de programas computacionais pode ajudar eficazmente o estudante a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço e a fazer conjecturas acerca de relações ou acerca de propriedades de objectos geométricos.

Não interessa dar a conhecer problemas históricos sem propor ao estudante a reconstrução de pelo menos um, usando material de desenho e corte ou programas computacionais adequados. Será também conveniente dar a conhecer um pouco da História da Geometria em especial dos exemplares das civilizações ligadas à Ibéria e à História de Portugal, incluindo o período da expansão.

Os conhecimentos dos estudantes sobre transformações geométricas devem ser tidos em consideração para serem utilizados e ampliados na resolução de reconstruções concretas e de tarefa de concepção e elaboração de novos objectos.

Devem explorar-se sempre que possível as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento deve ser aproveitado noutros módulos. Todas as tarefas devem estar ligadas à manipulação de modelos geométricos concretos.

Bibliografia

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1997). *Geometria: Matemática — 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

VELOSO, EDUARDO (1998). *Geometria — Temas actuais — Materiais para professores*. (Desenvolvimento curricular no Ensino Secundário;11). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Cursos Artísticos Especializados
Matemática

Este texto é uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que queira ensinar seriamente Geometria em Portugal. É uma obra que cobre inúmeros temas de Geometria elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos de História da Matemática que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho para clubes de matemática ou ainda para estudantes mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. A tecnologia é usada de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc."

COXFORD, A. (1993). *Geometria a partir de múltiplas perspectivas*. Lisboa: APM.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (1999). *Geometria com o Cabri-Géomètre*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de tarefas para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

JUNQUEIRA, M.; VALENTE, S. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de tarefas para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

APM. (1997). *Actividades com Padrões*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de tarefas e bibliografia.

APM. (2000). *Pasta de actividades - Pavimentações*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de tarefas experimentadas num Círculo de Estudos, desenvolvendo conexões da geometria com outras áreas.

GERDES, P. (2003). *Cestaria e Geometria na Cultura Tonga de Inhambane*. Maputo: Moçambique Editora.

Esta publicação contém numerosos exemplos dos padrões dos sipatsi e exemplos de exploração educacional e matemática desses padrões.

GERDES, P. (2000). *Lusona - Recreações Geométricas de África*. Lisboa: Texto Editora.

Este livro contém problemas geométricos baseados em desenhos tradicionais dos Tchowkwe de Angola - os (lu)sona.

FIELD, R. (1996). *Geometric patterns from Churches and Cathedrals*. Norfolk: Tarquin Publications.

Esta pequena publicação de 64 páginas pretende chamar a atenção para a enorme quantidade de padrões geométricos que se podem encontrar nas igrejas e nas catedrais.

FIELD, R. (1996). *Geometric patterns from Tiles and brickwork*. Norfolk: Tarquin Publications.

Esta pequena publicação de 64 páginas inclui muitos exemplos criativos e decorativos do uso de tijolos em paredes, edifícios e pavimentos.

SORDO, M. E PLEQUEZUELO, P. (1990). *Tramas geométricas en la decoración cerámica de la Alhambra*. Granada: Universidad de Granada.

Cursos Artísticos Especializados
Matemática

GRICHLOW, K. (1998). *Islamic Patterns. An Analytical and Cosmological Approach*. London: Thames & Hudson.

Esta publicação contém propostas de tarefas para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

AGUIRREGABIRIA, J. M. (1987). *Taller de Sabios*. Madrid: Biblioteca de Recursos Didácticos Alhambra.

GRUNBAUM, B., Shepard, G. (1987). *Tilings and Patterns*. New York

LOFF, DINA (1991). *Polígonos e Pavimentações - Uma Abordagem Elementar*. Coimbra: SPM.

MARTIN, G. (1982). *Transformation Geometry, An Introduction to Symmetry*. New York: Springer Verlag.

BALMELLE, C. et al (2002). *Le décor géométrique de la mosaïque romaine I – répertoire graphique et descriptif des compositions linéaires et isotropes*. Paris: éditions Picard.

BALMELLE, C. et al (2002). *Le décor géométrique de la mosaïque romaine II– répertoire graphique et descriptif des décors centrés*. Paris: éditions Picard.

KING, JAMES E SCHATTSCHNEIDER, DORIS (ed) (2003). *Geometria Dinâmica - selecção de textos do livro Geometry Turned On!*. Lisboa: APM.

BELLINGERI, P., DEDÒ, M., SIENO, S. E TURRINI, C. (2003). *O ritmo das formas*. Portugal: Associação Atractor.

Nestes livros estão compilados mais de 1600 desenhos – trata-se de uma obra gráfica excepcional. Trata-se também de uma fonte de inspiração para os gráficos do nosso tempo. É uma obra arqueológica científica, fruto de um trabalho colectivo do CNRS, do Centro de Investigação sobre os Mosaicos fundada por Henri Stern.

As centenas de motivos geométricos referidos referem-se ao território mediterrânico e da civilização romana, desde as suas origens helenísticas até aos seus prolongamentos protobizantinos, e formam um catálogo quase exaustivo das invenções ornamentais dos mosaicos antigos em matéria de composições lineares e isotrópicas – Tomo I e das decorações tipo floridas e centradas – Tomo II.

ATRATOR: Simetrias

<http://www.atractor.pt/simetria/matematica/index.html>

RELIGIOUS BELIEFS MADE VISUAL: GEOMETRY AND ISLAM

<http://www.askasia.org/frclasrm/lessplan/I000030.htm>

Metropolitan Museum: Esta página é um plano de aula sobre padrões islâmicos, precisamente.

SIMETRIA E PADRÕES - A ARTE DAS CARPETES ORIENTAIS

<http://mathforum.org/geometry/rugs/symmetry/>

Uma página contendo explicações detalhadas das simetrias com exemplos e fornecendo bastantes exemplos concretos de tapetes orientais para estudar as simetrias

PADRÕES DE FRISOS

<http://server1.fandm.edu/departments/mathematics/a.crannell/hm/Math/frieze.html>

Os 7 tipos de frisos com exemplos de vários monumentos.

PROJECTO "RICH PROBLEM SOLVING CONTEXTS"

<http://www.math.okstate.edu/~rpssc/>

Cursos Artísticos Especializados
Matemática

Materiais de apoio e trabalhos de estudantes sobretudo à volta do tema das simetrias e da arte.

THE 'SYDNEY LACE' OF AUSTRALIA - AND THE REST OF THE WORLD

http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=1341

Contém interessantes exemplos do uso de frisos em estruturas de ferro forjado.

SEMINOLE PATCHWORK DESIGNS

<http://www.austincc.edu/hannigan/Presentations/NSFMar1398/MathofSP.html>

Padrões de frisos usados pelos índios americanos Semínoles.

ANDÚJAR, F. J. S. (1994). Teselaciones periódicas, aperiódicas y especiales. In *Suma* 14-15, Artículos, 27-34.

Tema 3 - Estatística

15 aulas de 90 minutos

Algumas das noções que se tratam nesta unidade já foram abordadas no 3º ciclo e, por isso, é possível em qualquer altura reinvestir nestes conhecimentos e completá-los progressivamente.

O estudante deverá ficar a saber organizar, representar e tratar dados recolhidos em bruto (ou tabelados) para daí tirar conclusões numa análise sempre crítica e sempre consciente dos limites do processo de matematização da situação. É importante que o estudo da Estatística contribua para melhorar a capacidade dos estudantes para avaliar afirmações de carácter estatístico, fornecendo-lhes ferramentas apropriadas para rejeitar quer certos anúncios publicitários quer notícias ou outras informações em que a interpretação de dados ou a realização da amostragem não tenha sido correcta.

Este tema fornece uma excelente oportunidade para tarefas interdisciplinares, individualmente ou em grupo, devendo o professor ao definir o plano de trabalho com os estudantes incentivá-los a recorrer ao computador. No final, os estudantes devem interpretar e comunicar os resultados à turma fazendo uma análise crítica e estando conscientes que modos diferentes de apresentar as conclusões podem alterar a mensagem.

No estudo deste tema o estudante deve recorrer à calculadora gráfica ou ao computador e às suas potencialidades para resolver muitos dos problemas e representar adequadamente os dados (por exemplo, no caso dos histogramas ou da regressão).

Pré-Requisitos: Estatística do 3º ciclo do Ensino Básico. Os estudantes devem conhecer a função afim, reconhecer essa função através do gráfico, esboçá-lo e conhecer algumas propriedades (monotonia e zeros de forma apenas intuitiva e usando os conhecimentos de equações). Os estudantes devem conhecer os números reais e representar intervalos de números reais.

Desenvolvimento do tema e indicações metodológicas

Estatística - Generalidades

- Objecto da Estatística e breve nota histórica sobre a evolução desta Ciência; utilidade na vida moderna. Clarificação de quais os fenómenos que podem ser objecto de estudo estatístico; exemplificação de tais fenómenos com situações da vida real, salientando o papel relevante da Estatística na sua descrição.

Deve-se chamar a atenção para o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento.

- Recenseamento e sondagem. As noções de população e amostra. Compreensão do conceito de amostragem e reconhecimento do seu papel nas conclusões estatísticas; distinção entre os estudos e conclusões sobre a amostra e a correspondente análise sobre a população. Noções intuitivas sobre as escolhas de amostras, sobre a necessidade de serem aleatórias, representativas e livres de vícios de concepção.

Sendo a Estatística a Ciência que trata dos "dados", num procedimento estatístico estão envolvidas, de um modo geral, duas fases: uma fase de organização dos dados recolhidos, em que se procura reduzir, de forma adequada, a informação neles contida – Estatística Descritiva, e uma segunda fase, em que se procura tirar conclusões e tomar decisões para um conjunto mais vasto, de onde se recolheram os dados – Inferência Estatística. Existe, no entanto, uma fase pioneira, que diz respeito à aquisição dos próprios "dados". Deve-se realçar a importância de, ao iniciar qualquer estudo estatístico, proceder cuidadosamente ao planeamento da experiência que conduz à recolha dos "dados" que serão objecto de tratamento estatístico.

- Estatística Descritiva e Estatística Indutiva.

Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos)

- Análise gráfica de atributos qualitativos (gráficos circulares, diagramas de barras, pictogramas); determinação da moda.
- Análise de atributos quantitativos: variável discreta e variável contínua.
- Variável discreta: tabelas de frequências (absolutas, relativas e relativas acumuladas); gráficos (diagrama de barras); função cumulativa.
- Variável contínua: tabelas de frequências (absolutas, relativas e relativas acumuladas); gráficos (histograma, polígono de frequências); função cumulativa.
- Medidas de localização de uma amostra de dados quantitativos: moda ou classe modal; média; mediana; quartis.
- Medidas de dispersão de uma amostra de dados quantitativos: amplitude; variância; desvio padrão; amplitude interquartis.
- Discussão das limitações destas estatísticas.
- Diagramas de "extremos e quartis".

Deve-se chamar a atenção para o facto de que a organização dos dados, consiste em resumir a informação neles contida através de tabelas, gráficos e algumas medidas, a que damos o nome de "estatísticas". Nesta fase, em que se substitui todo o conjunto dos dados, por um sumário desses dados, devem-se tomar as devidas precauções, pois nem todos os instrumentos de redução de dados se aplicam a todos os tipos de dados. Assim, de entre esses processos deve-se ter presente quais os mais adequados e em que situações é ou não conveniente aplicá-los. A título de exemplo

referimos o facto de não ter qualquer sentido calcular a média para dados de tipo qualitativo, mesmo que as diferentes categorias assumidas pela variável em estudo estejam representadas por números.

Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva)

- Diagrama de dispersão; associação linear entre variáveis; ideia intuitiva de associação; exemplos gráficos de associação positiva (forte ou fraca), negativa (forte ou fraca) ou nula.
- Coeficiente de correlação e sua variação em $[-1, 1]$.
- Definição de centro de gravidade de um conjunto finito de pontos; sua interpretação física.
- Ideia intuitiva de recta de regressão; sua interpretação e limitações.

Generalizando o estudo de uma única variável, faz-se uma introdução ao estudo dos dados bivariados, insistindo na representação gráfica sob a forma do diagrama de dispersão ou diagrama de pontos. Quando, a partir desta representação, se verificar uma tendência para a existência de uma associação linear entre as duas variáveis em estudo, identifica-se uma medida que quantifica o grau de associação - o coeficiente de correlação, assim como se apresenta um modelo matemático que permitirá, conhecido o valor de uma das variáveis, obter uma estimativa para o valor da outra variável.

Bibliografia

MARTINS, M. E. G. (coord.), MONTEIRO, C., VIANA, J., TURKMAN, M.(1997). *Estatística: Matemática 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME-DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para este programa, pelo que é de consulta indispensável.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (1999). *Estatística e Calculadoras Gráficas*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém tarefas sobre estatística, redigidas tendo em vista uma possível utilização na sala de aula; contém ainda comentários sobre as tarefas e propostas de resolução das mesmas.

MOORE, DAVID (2000). *Statistics, The Science of data. For all Practical Purposes: Mathematical Literacy in Today's World*, Part II, 5th ed. New York: Freeman.

MOORE, DAVID (2000). *The Basic of Statistics*. New York: Freeman.

MOORE, DAVID (2000). *Introduction to the Practice of Statistics*. New York: Freeman.

Livros recomendados pela Sociedade Portuguesa de Estatística para apoio aos professores de Matemática do Ensino Secundário.

CLEGG, FRANCES. (1995). *Estatística para todos*. Lisboa: Gradiva.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA E ESCOLA SECUNDÁRIA TOMAZ PELAYO
Projecto ALEA — <http://alea-estp.ine.pt/> —

Cursos Artísticos Especializados
Matemática

Esta página contém documentos destinados a apoiar o ensino da Estatística a nível do ensino secundário. Além de uma série de páginas com esclarecimentos sobre temas científicos, tem páginas com temas da actualidade relacionados com a Estatística, jogos didácticos, um fórum de discussão e uma Galeria Virtual com trabalhos de escolas.

CHANCE

<http://www.dartmouth.edu/~chance/>

A página do Projecto Chance, um projecto de ensino de literacia quantitativa, constitui um bom recurso para o estudo da estatística.

Tema 4 - Funções e Gráficos - Generalidades. Funções polinomiais.

18 aulas de 90 minutos

Os conhecimentos sobre funções, que os estudantes devem trazer do terceiro ciclo do ensino básico, vão ser ampliados com o estudo das funções quadráticas e cúbicas; estas serão estudadas num contexto de modelação matemática, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionam variáveis da vida corrente, de outras áreas da Matemática, ou de outras disciplinas.

Os estudantes devem reconhecer que o mesmo tipo de função pode constituir um modelo de diferentes situações problemáticas.

Pré-Requisitos: Os estudantes devem conhecer a função afim, reconhecer essa função através do gráfico, esboçá-lo e conhecer algumas propriedades (monotonia e zeros de forma apenas intuitiva e usando os conhecimentos de equações). Os estudantes devem saber resolver equações e inequações do 1º grau e resolver equações do 2º grau e, obviamente, conhecer os números reais e representar intervalos de números reais.

Desenvolvimento do tema e indicações metodológicas

Resolução de problemas envolvendo funções, abrangendo progressivamente os seguintes temas:

- Função, gráfico (gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal) e representação gráfica.

O estudo das funções deve começar com a análise de algumas situações de modelação matemática (por exemplo, usando dados concretos recolhidos por calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequados).

Para todos os tipos de funções devem ser dados exemplos a partir de questões concretas (tanto de outras disciplinas que os estudantes frequentem como de situações reais – por exemplo de recortes de jornais). Particular importância deverá ser dada a situações problemáticas, situações de modelação matemática e a exemplos da Geometria, devendo retomar-se alguns daqueles que foram estudados no tema anterior.

Deve ser dada ênfase especial à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos, nomeadamente quando forem usadas inequações.

- Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para as seguintes classes de funções:

- i) funções quadráticas;
- ii) funções cúbicas.

As propriedades sugeridas são: domínio, contradomínio, pontos notáveis (intersecção com os eixos coordenados), monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em

Cursos Artísticos Especializados
Matemática

relação ao eixo dos YY e à origem, limites nos ramos infinitos. Os estudantes devem determinar pontos notáveis e extremos tanto de forma exacta (em casos simples, quando tal for possível) como de forma aproximada a partir do gráfico traçado na calculadora gráfica ou computador (com uma aproximação definida a priori).

Esse estudo deve incluir:

a) análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções dessas classes (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez);

No estudo das famílias de funções os estudantes podem realizar pequenas investigações.

b) transformações simples de funções: dada a função, esboçar o gráfico das funções definidas por $y = f(x)+a$, $y = f(x+a)$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$, com a positivo ou negativo, descrevendo o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.

O estudo das transformações simples de funções deve ser feito tanto usando papel e lápis como calculadora gráfica ou computador; a função f tanto pode ser dada a partir de um gráfico como a partir de uma expressão analítica.

• (opcional) Estudo elementar de polinómios interpoladores.

Bibliografia

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1997). *Funções: Matemática 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

CARAÇA, BENTO DE JESUS (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Col. Ciência Aberta, Vol. 98 (2a ed.). Lisboa: Gradiva.

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real. Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo

Cursos Artísticos Especializados
Matemática

de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

TEODORO, VÍTOR ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).

Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de tarefas e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções.*

ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções.*

CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática.*

<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeo

Polinómios — http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_acciao/videos/ —

Este vídeo, de excelente qualidade, presta-se a diversos tipos de explorações na sala de aula. É acompanhado de um texto de apoio com sugestões de tarefas.

Tema 5 – Distâncias inacessíveis

18 aulas de 90 minutos

No ensino básico os estudantes tiveram um primeiro contacto com a semelhança de triângulos e com a trigonometria. Pretende-se que aqui consigam integrar esses estudos na resolução de problemas mais avançados ficando capazes de determinar lados e ângulos em problemas com triângulos rectângulos e não rectângulos, podendo assim calcular todo o tipo de distâncias inacessíveis.

Algumas das noções que se tratam nesta unidade já foram abordadas no 3º ciclo e, por isso, é possível em qualquer altura reinvestir nestes conhecimentos e completá-los progressivamente.

Não se pretende um estudo clássico das fórmulas trigonométricas e muito menos das funções trigonométricas mas tão só uma aplicação da trigonometria básica do triângulo rectângulo à resolução de problemas do tipo designado por “resolução de triângulos” num contexto obrigatoriamente de aplicações, com sólidos geométricos concretos ou em situações da vida real.

Este tema fornece uma excelente oportunidade para tarefas interdisciplinares, individualmente ou em grupo, devendo o professor ao definir o plano de trabalho com os estudantes incentivá-los a recorrer ao computador. No final, os estudantes devem interpretar e comunicar os resultados à turma.

No estudo deste tema o estudante deve recorrer à calculadora gráfica para efectuar todo o tipo de cálculos trigonométricos e ao computador (nomeadamente software de geometria dinâmica) para simular as situações e conjecturar o caminho para resolver muitos dos problemas.

Pré-Requisitos: Semelhança de triângulos e Trigonometria do 3º ciclo do Ensino Básico.

Desenvolvimento do tema e indicações metodológicas

Resolução de triângulos rectângulos

- Resolução de triângulos rectângulos usando o teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos e a trigonometria básica.
- Estudo de alguns exemplos históricos

Exemplos de problemas possíveis: o problema do túnel de Samos, o método de Tales para determinar a altura das pirâmides de Egipto, o método de Eratóstenes para determinar o raio da Terra.

Resolução de triângulos obliquângulos

- Lei dos senos e lei dos co-senos.

Não está em causa a dedução das duas leis, apenas a sua informação e a compreensão do seu significado.

- Resolução de triângulos obliquângulos.

Não se pretende um estudo exaustivo com análise de todos os casos de possibilidade e de impossibilidade, mas sim um estudo num contexto de resolução de problemas ou sob a forma de uma pequena investigação, onde o estudante também se aperceba que dados arbitrários podem levar a uma impossibilidade.

Determinação de distâncias inacessíveis.

Devem ser resolvidos problemas de todos os tipos usando apenas os métodos estudados, sempre em situações concretas. Todos os estudantes devem elaborar um projecto pessoal de determinação de uma distância inacessível, usando instrumentos adequados, mesmo rudimentares (ainda que o teodolito seja reduzido a um grafómetro artesanal “TPC” feito com um transferidor, uma palhinha e um clipe).

Outras aplicações da trigonometria.

As aplicações a incluir aqui devem fazer essencialmente apelo a conhecimentos de trigonometria antes estudados. Exemplos possíveis incluem situações envolvendo determinação de áreas e volumes, determinação do melhor ângulo de incidência da luz para obter um determinado efeito, ou melhor ângulo de visualização de um quadro. Se aparecerem funções trigonométricas, o seu estudo deve ser efectuado usando calculadora ou computador.

Bibliografia

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1997). *Geometria: Matemática — 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

VELOSO, EDUARDO (1998). *Geometria — Temas actuais — Materiais para professores*. (Desenvolvimento curricular no Ensino Secundário;11). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Este texto é uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que queira ensinar seriamente Geometria em Portugal. É uma obra que cobre inúmeros temas de Geometria elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos de História da Matemática que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho para clubes de matemática ou ainda para estudantes mais interessados. É altamente recomendável

Cursos Artísticos Especializados Matemática

a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. A tecnologia é usada de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc."

ALBERS, DONALD ET AL. (1994). *Size and shape, Inaccessible distances. For all Practical Purposes: Mathematical Literacy in Today's World*, Part V, 3rd ed. New York: Freeman.

Um capítulo exemplar de um livro exemplar sobre aplicações da trigonometria do triângulo rectângulo, contendo inúmeros exemplos concretos, incluindo muitos exemplos históricos (e que infelizmente não aparece em edições mais recentes do livro).

CALADO, J. JORGE G. (1970). *Compêndio de Trigonometria*, 2ª ed. Lisboa: Emp. Lit. Fluminense.

Um livro de texto clássico demasiado virado para os aspectos algébricos mas que contém um último capítulo com aplicações para triângulos rectângulos e oblíquângulos que pode fornecer ideias interessantes.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (1999). *Geometria com o Cabri-Géomètre*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de tarefas para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

JUNQUEIRA, M.; VALENTE, S. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de tarefas para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

COXFORD, A. (1993). *Geometria a partir de múltiplas perspectivas*. Lisboa: APM.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeos

1. O Teorema de Pitágoras, 2. Semelhanças, 3. O Túnel de Samos

— http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/videos/ —

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes, e estes três relacionados directamente com a Geometria Elementar podem ser usados (ou apenas um excerto) como forma de motivação para a aula de matemática ou para tarefas fora da sala de aula.

CALCULANDO DISTÂNCIAS SEM MEDIR

<http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/exatas/matematica/tc2000/2mat20-b.pdf>

A LEI DOS CO-SENOS

<http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/exatas/matematica/tc2000/mat2g42.pdf>

A LEI DOS SENOS

<http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/exatas/matematica/tc2000/mat2g43.pdf>

DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS

<http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/exatas/matematica/tc2000/mat2g44.pdf>

Uma série de quatro textos didácticos simples, com muitos exemplos, que podem ser usados como textos de apoio para os estudantes.

TRIGONOMETRIA: EXERCÍCIOS SOBRE RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria/trigo05-a.htm>

Oito exemplos resolvidos.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Cursos Artísticos Especializados
Matemática

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/4b_eso/Resolucion_triangulos_rectangulos/Resotri.htm

Duas apliquetas interactivas.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Bach_CNST_1/Resolucion_triangulos_oblicuangulos/Resolucion_triangulos_oblicuangulos.htm

Quatro apliquetas interactivas para quatro casos diferentes.

TRIGONOMETRIA : ONTEM E HOJE

<http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/curtrig.html>

Uma visão histórica da trigonometria contendo inúmeros exemplos concretos, nomeadamente de resolução de triângulos.

Tema 6 – Matemática e Arte

18 aulas de 90 minutos

Neste tema cada estudante deve escolher um artista (ou uma escola ou um período) e investigar quais as técnicas de origem matemática que ele usa. O campo de possibilidades é imenso, e inclui o uso de certas figuras geométricas (em pintores) ou sólidos geométricos (em escultores), o uso do rectângulo de ouro ou da proporção dourada, o uso da perspectiva, o uso de simetrias, o uso da translação, de frisos, de pavimentações, etc., etc. ...

Trabalhando individualmente ou em grupo, os estudantes devem escolher artistas (ou escolas ou períodos) diferentes, devendo no final apresentar o resultado do trabalho aos colegas; assim, embora cada estudante estude apenas um tema, ao ouvir os seus colegas, acaba por ficar a conhecer vários outros temas.

O professor deve organizar o trabalho de modo que os estudantes não escolham todos o mesmo tipo de assunto matemático para que seja possível à turma ouvir falar de um número razoável de temas diferentes (seria por exemplo um pouco restritivo que todos os estudantes fossem procurar o rectângulo de ouro em diferentes artistas), embora possa haver obviamente alguma repetição desde que relativa a artistas ou épocas substancialmente diferentes.

A colaboração de outros professores da escola na procura de artistas, escolas ou épocas interessantes é obviamente preciosa.

Se o nível dos trabalhos o justificar, seria interessante organizar uma exposição na escola (ou noutras escolas) de modo a que fique bem clara a ideia de que a Matemática e a Arte têm muito em comum.

Bibliografia

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1997). *Geometria: Matemática — 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

VELOSO, EDUARDO (1998). *Geometria — Temas actuais — Materiais para professores*. (Desenvolvimento curricular no Ensino Secundário;11). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Este texto é uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que queira ensinar seriamente Geometria em Portugal. É uma obra que cobre inúmeros temas de Geometria elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos de História da Matemática que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho

Cursos Artísticos Especializados
Matemática

para clubes de matemática ou ainda para estudantes mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. A tecnologia é usada de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc."

CASIMIRO, LUÍS ALBERTO ESTEVES DOS SANTOS (2004). *A Anunciação do Senhor na pintura quinhentista portuguesa (1500-1550) – análise geométrica, iconográfica e significado iconológico*, (tese de doutoramento). Porto.

Este extensíssimo trabalho contém inúmeros exemplos do uso de elementos geométricos na pintura. A sua consulta é suficientemente acessível para poder ser um elemento de consulta para estudantes.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (1999). *Geometria com o Cabri-Géomètre*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de tarefas para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

JUNQUEIRA, M.; VALENTE, S. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de tarefas para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

GERDES, P. (2003). *Cestaria e Geometria na Cultura Tonga de Inhambane*. Maputo: Moçambique Editora.

Esta publicação contém numerosos exemplos dos padrões dos sipatsi e exemplos de exploração educacional e matemática desses padrões.

GERDES, P. (2000). *Lusona - Recreações Geométricas de África*. Lisboa: Texto Editora.

Este livro contém problemas geométricos baseados em desenhos tradicionais dos Tchowkwe de Angola - os (lu)sona.

GRUNBAUM, B., Shepard, G. (1987) *Tilings and Patterns*. New York.

LOFF, DINA (1991) *Polígonos e Pavimentações - Uma Abordagem Elementar*. Coimbra: SPM.

MARTIN, G. (1982). *Transformation Geometry, An Introduction to Symmetry*. New York: Springer Verlag.

GHYKA, MATILA (1977). *The Geometry of Art and Life*. New York: Dover.

BLACKWELL, W. (1991). *Geometry in Architecture*. Berkeley: Key Curriculum Press.

ATRATOR: Simetrias

<http://www.atractor.pt/simetria/matematica/index.html>

RELIGIOUS BELIEFS MADE VISUAL: GEOMETRY AND ISLAM

<http://www.askasia.org/frclasrm/lessplan/I000030.htm>

Metropolitan Museum: Esta página é um plano de aula sobre padrões islâmicos, precisamente.

ARTISTAS MATEMÁTICOS, MATEMÁTICOS ARTISTAS

<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm33/index.html>

Cursos Artísticos Especializados Matemática

Página com referências breves à matemática de artistas como Almada Negreiros, Oscar Niemeyer, Piet Mondrian, George Seurat e Leonardo da Vinci.

NADIR AFONSO

<http://www.nadirafonso.pt/>

"A geometria é uma ciência e não é uma arte.

-- Na verdade podemos distinguir duas espécies de geometrias: aquelas que se constituem por via racional e que todos conhecem e aquelas a que chamamos leis de integração e desintegração dos espaços e se constituem por via intuitiva; sobre estas e sobre as suas características foi, por nós, elaborado um longo trabalho estético que, todos desconhecem ou fazem vista grossa." - Nadir Afonso.

LE CORBUSIER (CHARLES EDOUARD JEANNERET), THE MODULOR: A Harmonious Measure to the Human Scale Universally Applicable to Architecture and Mechanics and Modulor 2 (Let the User Speak Next). 2 volumes. Birkhäuser, Basel, 2000. [Facsimile of the 1954 Faber and Faber 1st English Language Edition]. Reviewed by Michael J. Ostwald
http://www.nexusjournal.com/reviews_v3n1-Ostwald.html

*"Mathematics is the majestic structure conceived by man
to grant him comprehension of the universe" LE CORBUSIER*

LA GEOMETRÍA EN EL ARTE DE M.C. ESCHER

http://descartes.cnice.mecd.es/taller_de_matematicas/grabados_de_escher/indice.htm

Um texto introdutório muito acessível às pavimentações do holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972), contendo apliquetas interactivas.

HOFSTADTER, DOUGLAS (2000). *Gödel, Escher, Bach – Laços Eternos*. Lisboa: Gradiva.

SCHATTSCHEIDER, D. E WALKER, W. (1991). *Caleidociclos de M.C. Escher*. Berlim: Taschen.

ERNST, B. (1991). *O espelho mágico de M.C. Escher*. Berlim: Taschen.

M.C. ESCHER (1994). - *Gravura e Desenhos*. Berlim: Taschen.

M. C. ESCHER

<http://www.di.uminho.pt/~lsb/lena/escher.html>

Existe uma exposição itinerante portuguesa sobre os trabalhos de Escher.

DURER'S POLYHEDRA

<http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/durer.html>

Referência, com exemplos e imagens originais, aos poliedros desenhados pelo pintor renascentista alemão Albrecht Durer (1471-1528).

MATHEMATICS AND ART - PERSPECTIVE

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Art.html>

Uma história da perspectiva com referências a muitos dos seus actores principais como al-Haytham, Brunelleschi, Alberti, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, A. Durer e tantos outros.

VÍDEO: The Art of Renaissance Science: Galileo and Perspective

DAUBEN, JOSEPH W. (1991), 45 minutes, Science Television Productions.

Uma autoridade na História da Matemática fala sobre a história da perspectiva.

Bibliografia Geral

ABRANTES, P.; PONTE, J.P. et al.(1999) *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Grupo Matemática para todos -- investigações na sala de aula. Lisboa: Associação de Professores de Matemática

ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J.P. et al.(1996) *Investigar para aprender matemática*. Grupo Matemática para todos – investigações na sala de aula. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Estes livros reúnem um conjunto de artigos elaborados no âmbito do Projecto Matemática para Todos à volta da incorporação, nas aulas e nos currículos de matemática, de tarefas de natureza investigativa realizadas pelos estudantes. Segundo os organizadores dos volumes, as tarefas de investigação podem ser inseridas, naturalmente, em qualquer parte do currículo, representando na verdade um tipo de trabalho que tem um carácter transversal na disciplina de Matemática. De acordo com os organizadores dos livros o trabalho realizado por este projecto confirma as potencialidades da tarefa investigativa para a aprendizagem da Matemática e dá muitas pistas sobre o modo como ela se pode inserir nas tarefas das escolas.

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME-DEB.

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico — competências essenciais*. Lisboa: ME-DEB.

Estas publicações do Departamento de Educação Básica constituem importantes fontes de informação sobre a Matemática do ensino básico em Portugal absolutamente necessárias para quem lecciona no ensino.

DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO

Matemática no Secundário: — <http://www.dgidec.min-edu.pt/mat-no-sec/> —

O Departamento do Ensino Secundário do Ministério da Educação ao criar este espaço, pretende dar uma ajuda a todos os professores na recolha de informações úteis à sua prática pedagógica, contribuindo para a sua auto-formação e actualização. Nesta página poderá encontrar os Programas de Matemática do Ensino Secundário (Programa Ajustado), as Brochuras de apoio à concretização das orientações curriculares, o InforMat, boletim de informação, divulgação e debate do ensino da Matemática, apresentação de tarefas a desenvolver na sala de aula e de tarefas interactivas prontas a serem utilizadas, os endereços de páginas da Internet com informações úteis sobre a Matemática e a Educação Matemática e destaques com notícias e informações úteis.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (1999). *Modelação no Ensino da Matemática - Calculadora, CBL e CBR*. Lisboa: APM.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (2002). *Funções no 3º ciclo com Tecnologia*. Lisboa: APM.

Estas publicações contêm tarefas de modelação matemática para utilização na sala de aula; umas tarefas são facilmente realizadas com a ajuda de uma calculadora gráfica e as outras necessitam da utilização de sensores para recolha de dados experimentais; são incluídos comentários e resoluções das tarefas. Os conceitos matemáticos envolvidos nas tarefas incluem funções definidas

Cursos Artísticos Especializados Matemática

por ramos, regressão, optimização, funções exponenciais e trigonométricas e função quadrática. A primeira publicação contém um texto introdutório sobre o processo de modelação matemática e a ligação entre a modelação matemática e a modelação no ensino da matemática; o texto situa ainda a modelação matemática no contexto dos actuais programas do ensino secundário.

PONTE, J. P. (coord.), BOAVIDA, A. M., GRAÇA, M. E ABRANTES, P. (1997). *Didáctica: Ensino Secundário*. Lisboa: ME-DES.

PONTE, J. P. (coord.), BRUNHEIRA, L., ABRANTES, P. E BASTOS, R. (1998). *Projectos Educativos: Ensino Secundário*. Lisboa: ME-DES.

Estas brochuras, editadas pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática, contém numerosas sugestões relevantes para este programa, pelo que são de consulta indispensável.

PONTE, J.P.; CANAVARRO, A. P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias* (Universidade Aberta, Vol.28). Lisboa: UA.

Este livro fornece uma excelente panorâmica da utilização das novas tecnologias na Matemática e na aula de Matemática. É apresentada uma perspectiva histórica da utilização das tecnologias na matemática sendo discutidos bastantes exemplos em várias áreas curriculares (números, funções, geometria, estatística e probabilidades) e analisados com algum detalhe vários tipos de programas de computador (jogos, folhas de cálculo, linguagem LOGO, programas de geometria dinâmica). É certamente uma obra de muito interesse para qualquer professor de Matemática pela ampla perspectiva que oferece.

ESTRADA, M.F., SÁ, C.C., QUEIRÓ, J.F., SILVA, M.C., COSTA, M.J. (2000). *História da Matemática* (Universidade Aberta, Vol.210). Lisboa: UA.

Este livro é o único que, em língua portuguesa, nos apresenta ao mesmo tempo uma panorâmica da História da Matemática e muitos exemplos concretos da matemática do passado. Contém perspectivas pouco usuais em livros de História da Matemática sobre a Matemática na China, em África, na Índia Medieval e na Civilização Islâmica. Inclui ainda um apanhado da História da Matemática em Portugal. Um excelente livro de consulta e fonte de exemplos que todos os professores de Matemática devem usar com frequência.

PRECATADO, A.; GUIMARÃES, H. (org.), (2001) *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas muito variadas de tarefas para a sala de aula, juntamente com um CD contendo os textos das tarefas.

FEBRUARY PROBLEMS - <http://sln.fi.edu/school/math2/feb.html>

Sítio com propostas de problemas abertos divididos por categorias: números; medida; geometria; padrões, álgebra e funções; estatística e probabilidades.

E-LAB - <http://www.harcourtschool.com/elab/>

Laboratório virtual que tem várias apliquetas para diferentes níveis e permite trabalhar conteúdos matemáticos de forma interactiva, desde simulação de lançamento de moedas, dados ou roletas, até descobrir eixos de simetria em figuras ou resolver equações.

PROF. MIGUEL DE GUZMÁN OZÁMIZ — <http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/> —

Esta página é um manancial inesgotável de informação relacionada com a Matemática, o seu ensino e a sua história. Salientamos o curso "Laboratório de Matemática", as tarefas e os textos de divulgação matemática.

MOCHO - Centro de Competência Nónio século XXI "Softciências" — <http://www.mocho.pt/>

Cursos Artísticos Especializados Matemática

Esta página contém um índice de páginas sobre Matemática em língua portuguesa, assim como um consultório sobre temas de Matemática.

NRICH — <http://nrich.maths.org/public/index.php>

Projecto da Universidade de Cambridge contendo propostas de problemas para estudantes do ensino básico e secundário. Os diferentes temas disponíveis estão ordenados aqui:

<http://nrich.maths.org/public/leg.php>

e os problemas do mês (ordenados por nível) estão aqui:

<http://nrich.maths.org/public/monthindex.php>

DESCARTES – Matemáticas interactivas — <http://descartes.cnice.mecd.es/>

Uma página do Ministério da Educação e Ciência de Espanha contendo lições, actividades e etiquetas relativas a todos os temas usuais de Matemática do Básico e Secundário.

MODELLUS WEB PAGE - Vítor Teodoro (SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL) -
<http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/>

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais e ficheiros de actividades que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática do secundário.

VIAJE GEOMÉTRICO AL ESPACIO

<http://www.upc.es/ea-smi/personal/claudi/web3d/espanyol/indexesp.htm>

Página da responsabilidade de Claudi Alsina contendo descrições de inúmeros poliedros (poliedros estrelados, antiprismas, policubos, deltaedros, etc.) e superfícies (esferas, cilindros, cones, hélices, bandas de Moebius, etc.), assim como questões sobre cada um dos modelos (e respectivas soluções).

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA — <http://www.apm.pt/>

Esta página contém a indicação dos projectos que APM desenvolve e ligações para outras páginas de interesse.

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA - <http://www.spm.pt/>

Esta página contém a indicação dos projectos que SPM desenvolve e ligações para outras páginas de interesse.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Os Primórdios da História da Matemática
http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/videos/

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes e podem ser usados (ou apenas um excerto) como forma de motivação para a aula de matemática ou para tarefas fora da sala de aula.